Kromming van ruimtetijd vereist een verdubbeling van het aantal vrijheidsgraden.

Hieronder zal hier op worden ingegaan, waarbij gebruik gemaakt wordt van [1].

Het gravitatieveld, veroorzaakt door massa plaats- en snelheids- verdeling in ons universum, resulteert in kromming van ruimtetijd.
Door Albert Einstein werd kromming opgelost via het werk van Bernhard Riemann. Uit dit werk blijkt dat kromming van ruimtetijd te beschrijven is in een lineaire ruimte als het aantal vrijheidsgraden van deze beschrijving verdubbeld wordt.

Dit feit is eenvoudig voor te stellen. Neem bijv. een elektron beschreven in gekromde ruimtetijd. In de QM is een elektron een punt-deeltje. M.a.w. een elektron wordt gegeven door een positie in 4D-ruimtetijd. Stel het elektron beweegt t.o.v. een observator. Nu legt het elektron een zgn. wereldlijn af in de 3D-relativistische ruimte in een tijd gemeten met de klok van een observator. Veronderstel dat op een bepaald tijdstip het (met het deeltje meebewegende) inertiaalstelsel de z-as evenwijdig aan de wereldlijn heeft en gericht is in de bewegingsrichting van het elektron. Door kromming van ruimtetijd zal de wereldlijn nooit de rechte z-as van het inertiaalstelsel volgen, maar een hiervan afwijkend gekromd pad afleggen. Zie ook figuur 1. Deze kromming is volledig te beschrijven als i.p.v. de 1 dimensionale z-as een 2D-vlak wordt gekozen waarin de kromming van de afgelegde weg van het elektron plaats vindt. De richting van dit vlak in het xy-vlak is natuurlijk variabel. De richting en grootte van de krommings-straal ρ wordt bepaald door de massa- en massasnelheids-verdeling van het volledige universum waardoor dit elektron beweegt.
Hierdoor is een gekromd pad pas volledig lineair te beschrijven na verdubbeling van de 4D-ruimtetijd $x^\mu = (ct, x, y, z)$ tot een zgn. Riemann-ruimte met het dubbele aantal lineaire coördinaten N, ofwel:

$$x^\mu \rightarrow x^n, \text{ met } n \in \{1, \dots, N\}. \tag{1}$$

Verdubbeling impliceert voor de relativistisch beschreven 4D-ruimtetijd dus N = 8.
In gekromde ruimtetijd is de fundamentele tensor, ofwel metriek, $g^{\mu\nu}$ niet een constante.
De overeenkomstige metriek in de N-dimensionale ***lineaire*** ruimte h_{nm} is *hierdoor* wel een constante.
Analyseer nu een infinitesimale verplaatsing: $x^\mu \rightarrow x^\mu + dx^\mu$ (2)
De afstand tussen deze 2 punten is nu: $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = h_{nm}dx^n dx^m$ (3)
Hierbij is $g_{\mu\nu}$ nu een variabele metriek veroorzaakt door kromming.
Kromming resulteert in een variabele determinant in het gebied $-1 < \det(g_{\mu\nu}) << 0$
Veelal zal de kromming zo gering zijn dat de SR limiet bijna geldig is: $\det(g_{\mu\nu}) \approx -1$

Het verschil tussen de twee punten van infinitesimale verplaatsing (2) resulteert ook in een verplaatsing in de lineaire N-dimensionale Riemann-ruimte.
De h_{nm} zijn constanten, zodat: $dx^n = x^n{}_{,\mu}dx^\mu$ (4)
Deze variatie (4) invullen in uitdrukking (3) levert: $ds^2 = h_{nm}x^n{}_{,\mu}x^m{}_{,\nu}\, dx^\mu dx^\nu = x^n{}_{,\mu}x_{n,\nu}dx^\mu dx^\nu$ (5)
Uit (3) en (5) volgt nu voor de fundamentele tensor: $g_{\mu\nu} = x^n{}_{,\mu}x_{n,\nu}$ (6)

Een willekeurige 4-vector A^μ op een punt x heeft een beeld in de lineaire Riemann-ruimte dat ook gegeven wordt door (4):

$$A^n(x) = x^n{}_{,\mu}A^\mu(x) \tag{7}$$

Veronderstel nu dat vector (7) ligt in gekromde ruimte op punt x en verplaats deze vector vervolgens parallel aan zichzelf over een infinitesimale afstand gegeven door (2). Door kromming van ruimtetijd zal deze vector (7) na parallelle verplaatsing gegeven door (2) niet meer in de echte gekromde 4D-wereld liggen. Dit verschil is van een hogere orde dan de verplaatsing zelf. Echter, deze parallel verplaatste vector is altijd te projecteren op het gekromde wereldoppervlak van de bekende 4D-ruimtetijd om zo een echte vector te verkrijgen.

Ofwel, bouw de vector op uit een tangentieel stuk en een normaal stuk, en verwaarloos vervolgens het normale stuk:

$$A^n = A_{tan}{}^n + A_{nor}{}^n, \tag{8}$$

met: $$A_{tan}{}^n = A_{tan}{}^\mu x^n{}_{,\mu}(x+dx) \tag{9}$$

$$A_{nor}{}^n = A_{nor}{}^\mu x^n{}_{,\mu}(x+dx) = 0 \tag{10}$$

Vermenigvuldig (8) met $x_{n,\nu}(x+dx)$:

$$A^n\, x_{n,\nu}(x+dx) = A_{tan}{}^\mu\, x^n{}_{,\mu}(x+dx)x_{n,\nu}(x+dx) = A_{tan}{}^\mu\, g_{\mu\nu}(x+dx) \tag{11}$$

Tot eerste orde in dx geeft dit:

$$A_{tan\,\nu}(x+dx) = A^n(x_{n,\nu}(x)+ x_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma) = A^\mu x^n{}_{,\mu}(x_{n,\nu}+ x_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma) = A_\nu + A^\mu x^n{}_{,\mu}\, x_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma \tag{12}$$

Parallelle verplaatsing verwaarloost kromming op infinitesimaal niveau als een hogere orde effect. Dit is consistent met Einstein's beeld dat kromming op infinitesimaal niveau altijd SR uit te werken moet zijn. Buiten de Schwarzschild straal r = 2m van zwarte gaten is kromming op <u>infinitesimaal</u> niveau altijd verwaarloosbaar! Ofwel veranderingen van 4-vectoren zijn dan parallel op te lossen via (12):

$$dA_\nu = A^\mu x^n{}_{,\mu}\, x_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma \tag{13}$$

Bij optellen/aftrekken van afgeleiden van de metriek blijkt dat alle indices van de N-dimensionale Riemann-ruimte geabsorbeerd kunnen worden in het zgn. Christoffel symbool: $\Gamma_{\mu\nu\sigma} = ½(g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu})$ (14)
Dit is géén tensor!
Uit (14) volgt direct: $g_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma}$ (15)
Door gebruik te maken van het Christoffel symbool (14) en (15) is parallelle variatie van een 4-vector te geven zonder gebruik te maken van de lineaire N-dimensionale Riemann-ruimte:

$$dA_\nu = A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma}dx^\sigma \tag{16}$$

Ofwel, door gebruik te maken van het Christoffel symbool worden alle referenties naar de niet interpreteerbare lineaire Riemann-ruimte verwijderd. Alleen afhankelijkheid van de symmetrische metriek $g_{\mu\nu}$ van de bekende 4D-ruimtetijd blijft over. Hierbij mag men echter nooit vergeten dat deze ruimtetijd altijd gekromd is!
Door deze kromming is differentiaal (16) niet willekeurig afhankelijk van metriek $g_{\mu\nu}$, maar van een som van gewone afgeleiden van deze metriek, zoals gegeven met het Christoffel symbool (14).

Het even getal $N \in \mathbb{N}$ dat het aantal vrijheidsgraden (coördinaten) van de lineaire Riemann-ruimte geeft, is altijd het aantal vrijheidsgraden van de beschreven gekromde wereld maal 2.

Kromming moet in elke willekeurige beschrijving van natuurkunde worden meegenomen volgens het S(amenhangende)A(cties)P(rincipe) van Einstein, zie bijv. [1] hoofdstuk 30. Ofwel kromming is in geen enkel fysisch model te verwaarlozen, zelfs in modellen waarin kromming niet meegenomen wordt zoals in alle QM modellen.

Bekijken we nu weer het elektron dat wordt waargenomen bewegende in de z-richting, dan resulteert kromming in een gekromde wereldlijn. Op elk tijdstip dat de positie van het elektron beschreven wordt is deze kromming als gevolg van veranderende massaverdeling rondom dit bewegende elektron weer anders. Zie ook figuur 1. Ofwel de kromming met straal loodrecht op de wereldlijn, ofwel de z-as op dat moment, vindt plaats in het 2D-vlak opgespannen door de raaklijn aan de wereldlijn (z-as) van het deeltje en de straal van kromming ρ op dat moment.

Kromming van een afgelegde wereldlijn is altijd te beschrijven door achtereenvolgens een infinitesimale verplaatsing langs de wereldlijn (de z-as in figuur 1) en dan een infinitesimale kromming in het vlak opgespannen door de z-as en het rotatie-punt in het xy-vlak op afstand ρ (zie fig. 1). Door deze kromming met achtereenvolgende infinitesimale stapjes te beschrijven wordt duidelijk dat deeltjes alléén exact te beschrijven zijn door verdubbeling van het aantal vrijheidsgraden. Naast de z-as is ook altijd de orthogonale kromminglengte ρ nodig. En dit geldt natuurlijk niet alleen voor de x, y en z-assen, maar ook voor de gebruikte tijdsas.

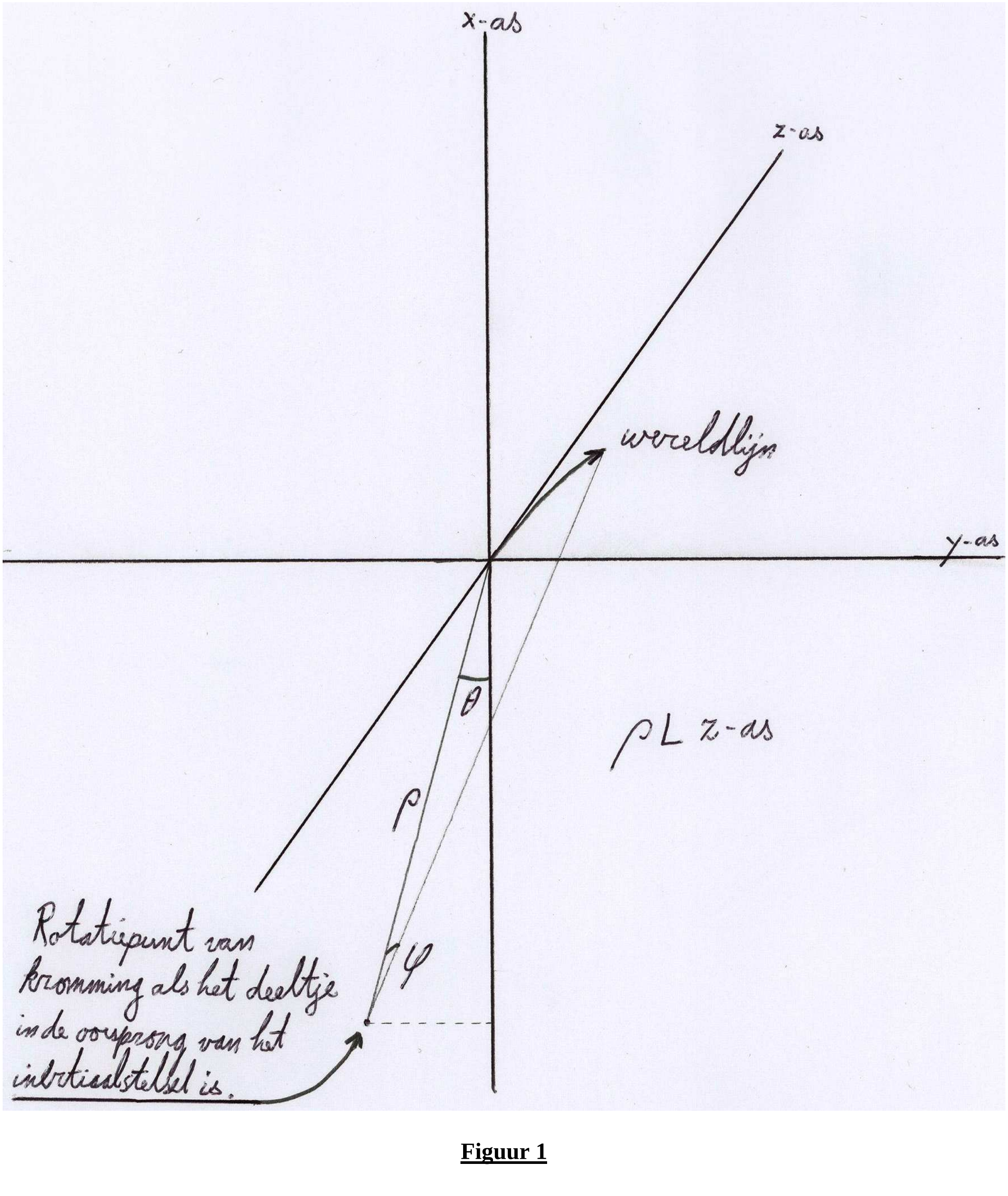
Bij vrijwel alle experimenten is kromming van ruimtetijd verwaarloosbaar. In de hier gebruikte fysische modellen wordt kromming hierom direct helemaal verwaarloosd. Echter een verdubbeling van het aantal vrijheidsgraden mag nooit weggelaten worden om aan het SAP te voldoen, zoals in volgende paragraaf zal blijken.

De in figuur 1 geschetste verdubbeling van het aantal vrijheidsgraden is als volgt te geven:

$$(0, 0, 0, 0) \rightarrow (c\delta t, -\rho\varphi\delta\varphi, -\rho\varphi\theta\delta\varphi, \rho\delta\varphi) \rightarrow (c\delta t, 0, 0, \rho\delta\varphi) \qquad (17)$$

In de tussenstap zijn tot eerste orde benaderd $\cos(\varphi) = \cos(\theta) = 1$ en $\sin(\varphi) = \varphi$ en $\sin(\theta) = \theta$. En deze hogere orde variaties leveren geen bijdragen op, ofwel worden nul.
Ofwel door kromming hebben we niet een verplaatsing in de 1D z-as, maar een rotatie $\delta\varphi$ om een punt op afstand ρ van het deeltje, waardoor het beweegt in een 2D-vlak. Dit wordt hierboven infinitesimaal beschreven met cilindrische coördinaten.

Figuur 1
Kromming van een elementair deeltje door kromming van ruimtetijd. Op het waargenomen tijdstip bevindt het met een punt gegeven deeltje zich in de oorsprong van het gekozen inertiaalstelsel en beweegt het zich in de richting van de positieve z-as. Door kromming buigt de wereldlijn van het deeltje in het 2D-vlak gegeven door de z-as en de krommingsstraal ρ. Het rotatiepunt bevindt zich natuurlijk altijd in het xy-vlak loodrecht op de z-as. De grootte van ρ en de richting ervan in het xy-vlak wordt geheel bepaald door de massa- en massasnelheids-verdeling op het tijdstip dat het waargenomen deeltje zich in de oorsprong van het zo gekozen coördinatenstelsel bevindt.



Figuur 1

Het aantal vrijheidsgraden van de Riemann-Christoffel tensor ofwel krommingstensor.

Door kromming van ruimtetijd moeten alle geldige bewegingsvergelijkingen als afgeleiden zgn. covariante afgeleiden gebruiken gegeven met ":":

$$A_{\mu:\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}A_{\sigma} \tag{18}$$

Met het Christoffel symbool $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ gegeven in (14).
Alleen bij gebruik van covariante afgeleiden is de transformatie van een afgeleide invariant onder verwisseling van coördinaten systeem. Hierom mogen alle afgeleiden in bewegingsvergelijkingen alleen covariante afgeleiden zijn.
De covariante afgeleide (18) is ook te zien als een tensor met 2 indices.
Een contra-variante vector met een covariante afgeleide heeft een extra min-teken:

$$A^{\mu}_{:\nu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}A^{\sigma} \tag{19}$$

Ook tensoren zelf kunnen alléén voorkomen met covariante afgeleiden.
Hierbij geeft elke covariante index een $-\Gamma$ term achter de gewone afgeleide "," en elke contra-variante index een $+\Gamma$ term achter de gewone afgeleide.
Bijv.: $T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma:\nu} = T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}T_{\sigma}{}^{\beta}{}_{\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}T_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu}T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\sigma}$ (20)
Hieruit blijkt de covariante afgeleide van een scalar gelijk te zijn aan de gewone "," afgeleide.
De fundamentele tensor $g_{\mu\nu}$ blijkt een constante tensor onder covariante differentiatie, zie ook (15):

$$g_{\mu\nu:\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}g_{\mu\alpha} = g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu\sigma} = 0 \tag{21}$$

Bij een model in vlakke ruimte (QM) moeten alle bewegingsvergelijkingen nog steeds beschreven worden met covariante afgeleiden, zodat deze vergelijkingen dezelfde vorm hebben in alle mogelijke coördinaten systemen.

Covariante afgeleiden onderscheiden zich van gewone afgeleiden doordat de volgorde van covariante afgeleiden uitmaakt voor het einderesultaat.
Neem bijvoorbeeld twee onafhankelijke covariante afgeleiden van een 4-vector ([1], hoofdstuk 11):

$$\begin{aligned} A_{\mu:\nu:\sigma} &= A_{\mu:\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}A_{\alpha:\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\mu:\alpha} = (A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}A_{\alpha})_{,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}(A_{\alpha,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}A_{\beta}) - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}(A_{\mu,\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}A_{\beta}) = \\ &= A_{\mu,\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}A_{\alpha,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}A_{\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\mu,\alpha} - A_{\beta}(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}) \end{aligned} \tag{22}$$

Tensor (22) en daar vanaf getrokken dezelfde uitdrukking (22) met $\nu \leftrightarrow \sigma$ verwisseld geeft de zgn. Riemann-Christoffel tensor $R^{\beta}_{\mu\nu\sigma}$, vermenigvuldigd met een 4-vector:

$$A_{\mu:\nu:\sigma} - A_{\mu:\sigma:\nu} = A_{\beta}R^{\beta}_{\mu\nu\sigma}, \text{ met: } R^{\beta}_{\mu\nu\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} \tag{23}$$

De Riemann-Christoffel tensor $R^{\beta}_{\mu\nu\sigma}$, ofwel krommingstensor, is een tensor omdat het linker lid van (23) een tensor is. Volgens het quotiënt theorema moet dan ook de met vector A_{β} vermenigvuldigde krommingsterm $R^{\beta}_{\mu\nu\sigma}$ een tensor zijn.
De krommingstensor volgt uit een analyse van twee opeenvolgende covariante afgeleiden. Hieruit blijkt dat door kromming covariante afgeleiden niet commuteren.
Voor de krommingstensor gelden de zgn. Bianchi symmetrie relaties (24) en (25):

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = - R_{\nu\mu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\nu\mu\beta\alpha} \tag{24}$$

Bianchi zelf keek naar 2 covariante afgeleiden van een tensor. Dit resulteert in ([1], hoofdstuk 13):

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta:\varepsilon} + R^{\mu}_{\nu\beta\varepsilon:\alpha} + R^{\mu}_{\nu\varepsilon\alpha:\beta} = 0 \tag{25}$$

Door deze symmetrie relaties heeft de krommingstensor met in principe $4^4 = 256$ vrijheidsgraden altijd maar 20 onafhankelijke vrijheidsgraden. Deze analyse is geheel uitgevoerd in de gekromde 4D-ruimtetijd, maar deze conclusie volgt natuurlijk ook uit een lineaire analyse zoals geschetst in figuur 1 en geanalyseerd met formule (17).

Einstein's bewegingsvergelijkingen voor het gravitatieveld volgen uit een niet nul contractie van de krommings-tensor (contractie van een van de eerste 2 en een van de overgebleven 2 indices), zoals bijv.:

$$R_{\mu\nu} = R^{\beta}{}_{\mu\nu\beta} \tag{26}$$

Dit is de zgn. symmetrische Ricci-tensor met 10 vrijheidsgraden.
Bianchi relatie (25) twee keer contraheren resulteert in:

$$(R^{\mu\nu} - ½g^{\mu\nu}R)_{:\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R^{\mu\nu} - ½g^{\mu\nu}R = \textit{constante} \tag{27}$$

De constante wordt bepaald door alle mogelijke oorzaken van het gravitatieveld in ons 4D-universum. Het spin2 gravitatieveld wordt gegenereerd door massa, gegeven door alle waargenomen spin½ deeltjes, ofwel de geladen en ongeladen elementaire leptonen en uit de geladen en ongeladen samengestelde baryonen. Daarnaast blijken alle geladen deeltjes altijd massa te hebben, ofwel hierdoor zijn ook alle geladen deeltjes indirect mede verantwoordelijk voor het gravitatieveld. Het EM-veld, aanwezig door geladen deeltjes, wordt beschreven met het zgn. spin1 foton. Het EM-veld heeft een anti-symmetrische stress-energie tensor $E_{\mu\nu}$ en dit veld tezamen met de bronnen (ladingen) is nu eenvoudig te geven met de 6 vrijheidsgraden tellende representatie spin1xspin½. De Maxwell vergelijkingen geven het EM-veld niet volledig. Er moet nog een zgn. ijksymmetrie worden opgelegd. Alleen de anti-symmetrische acties laten ijksymmetrie toe. Bij een 4D-ruimtetijd universum is de volledige ijksymmetrie precies gegeven in de bekende Q(uanten)V(elden)T(heorieën). Deze ijksymmetrie is gewoon de U(1)xSU(2)xSU(3) ijksymmetrie. De U(1)xSU(2) ijksymmetrie geeft gemengd via de zgn. Weinberg-hoek het massaloze foton en de geladen $W^{\pm}$ -deeltjes en het ongeladen massieve Z-deeltje. Al deze bosonen zijn elementaire spin1 deeltjes. De SU(3) ijksymmetrie beschrijft alle massieve en geladen quarks, die alleen gecombineerd voor kunnen komen in spin½ fermionen (baryonen) en bosonen (gluonen en mesonen) met meerdere mogelijke heelwaardige spin waarden.

Einstein kwam tot een constante veroorzaakt door massa, lading, het EM-veld en een kosmologische constante bijdrage gegeven door:

$$R_{\mu\nu} - ½g_{\mu\nu}R + 8\pi(\rho\nu_{\mu}\nu_{\nu}+E_{\mu\nu}) + \lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{28}$$

Hierbij is $R_{\mu\nu}$ de Ricci tensor, R de krommingsscalar, λ de bijdrage door de spin0 kosmologische constante.
Het door $(R_{\mu\nu} - ½g_{\mu\nu}R)$ gegeven spin2 gravitatieveld is aanwezig door massadichtheid $\rho > 0$ met snelheid ν_{μ}.
$E_{\mu\nu}$ is de anti-symmetrische stress-energie tensor van het EM-veld veroorzaakt door elektrische lading.

In deze beschrijving worden massa en lading beschreven met dichtheden. Verder zijn de sterke- en zwakke-kernkrachten niet meegenomen in vergelijking (28). Ofwel (28) staat volledig los van de QM.

Einstein's bewegingsvergelijking voor het gravitatieveld is: $R_{\mu\nu} = 0$ (29)
De Ricci tensor is symmetrisch, ofwel heeft 10 vrijheidsgraden net als de metriek.
Kromming geanalyseerd in de 4D-ruimtetijd heeft als meest algemene uitdrukking voor alle optredende vrijheidsgraden waarmee dit opgelost moet worden de bekende Riemann-Christoffel tensor (23). Door de Bianchi symmetrieën heeft deze tensor 20 = 2x10 vrijheidsgraden.

Conclusie: Kromming meenemen vereist verdubbeling van het aantal vrijheidsgraden in de beschrijving. Volgens het SAP moet kromming in elke beschrijving worden meegenomen. Dus ook in de QM. Naar mijn idee vermoedde Albert Einstein dit al toen hij zei dat de onzekerheidsrelaties van de QM verklaard moeten worden met zgn. verborgen variabelen. Volgens mij had Einstein gelijk met dit vermoeden.

In de QM worden elementaire deeltjes altijd beschreven als puntdeeltjes, zoals geschetst in figuur 1.
De enige manier om kromming van ruimtetijd in elk willekeurig model mee te kunnen nemen is nu gewoon de aanname dat elementaire deeltjes géén puntdeeltjes zijn, maar uitgebreide deeltjes in het 2D-vlak loodrecht op de waargenomen bewegingsrichting. Dus als een elementair deeltje in de z-richting beweegt zal het deeltje uitgebreid moeten worden beschreven in het xy-vlak met een gemiddelde uitgebreidheid ter grootte van de Planck-lengte.

Gebruikt werk:
[1] General Theory of Relativity, P.A.M. Dirac, *PRINCETON LANDMARKS IN PHYSICS*, ISBN 0-691-001146-X